LAS CIENCIAS FORMALES: EL MÉTODO AXIOMÁTICO-DEDUCTIVO

Las **ciencias formales** (lógica y matemática) utilizan el **método axiomático-deductivo**. Dicho método consiste en tomar como punto de partida una serie de **axiomas** (del griego **αξιωμα**: aquello que es considerado como verdadero sin necesidad de prueba o demostración) y, a partir de ellos proceder **deductivamente**.

Se entiende por **deducción** el proceso de razonamiento que permite derivar de una o varias proposiciones dadas (llamadas **axiomas** o **premisas**) otra que es su **consecuencia lógica necesaria** y que se denomina **conclusión**.

Un sistema formal se compone de lo siguiente:

1. Un **conjunto finito de símbolos** que se utilizan para la construcción de fórmulas. Es el alfabeto o vocabulario.
2. Una **gramática formal**, es decir, un mecanismo para la construcción de fórmulas bien formadas (abreviado: fbf ó wff)
3. Un **conjunto de axiomas** que deben ser fórmulas bien formadas.
4. Un conjunto de **reglas de inferencia** (mediante las cuales se obtienen conclusiones en base a la información conocida)
5. Un conjunto de **teoremas** que incluye todas las fbf que se pueden derivar de los axiomas o de otros teoremas mediante reglas de inferencia.

Las propiedades que deben cumplir los sistemas formales son:

1. **CONSISTENCIA**: No ha de ser posible demostrar en él una fórmula y su negación.
2. **COMPLETUD**: Todas las fórmulas lógicamente válidas (verdaderas bajo cualquier interpretación) han de ser demostrables a partir de los axiomas y las reglas de inferencia.
3. **DECIDIBILIDAD**: Un sistema es decidible cuando existe al menos un método efectivo (un algoritmo) para decidir si una fórmula cualquiera del lenguaje del sistema es lógicamente válida o no.

Concepto de VERDAD en los sistemas formales:

En los sistemas formales se entiende la **VERDAD** como **COHERENCIA**. Esto es, la verdad o falsedad de un enunciado depende de la relación que ese enunciado mantiene con otros enunciados, perteneciendo todos a una teoría. **Un enunciado es verdadero si se encuentra en la adecuada relación de implicación con otros enunciados**.

Ejemplos de axiomas y reglas de inferencia en la Lógica:

AXIOMAS:

(Significado de los símbolos: ┐ = negación; **V**= disyunción)

Principio de no contradicción: **┐ (a V ┐ a)** Afirma que una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo y en el mismo sentido

Principio de identidad: **a = a** Afirma que toda entidad es idéntica a sí misma.

Principio del tercero excluido: **(a V ┐ a)** Afirma que la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

ALGUNAS REGLAS DE INFERENCIA:

(Significado de los símbolos: ┐ = negación; → = implicación; **V** = disyunción)

MP (Modus ponens)

A → B

A

B

MT (Modus tollens)

A → B

┐B

┐A

DN (Doble negación)

A

┐┐A

Cp (Contraposición)

A → B

┐B → ┐ A

Sil (Silogismo)

A → B

B → C

A → C

SD (Silogismo disyuntivo)

A V B

┐ B

A

Ejemplos de axiomas en la matemática

AXIOMAS DE LA ARITMÉTICA

Los **axiomas de Peano** o **postulados de Peano** son un conjunto de axiomas para la aritmética introducidos por Giuseppe Peano en el siglo XIX. Los axiomas se han utilizado prácticamente sin cambios para una variedad de investigaciones metamatemáticas, incluyendo cuestiones acerca de la consistencia y completud de la aritmética y la teoría de números.

Los cinco axiomas o postulados de Peano son los siguientes:

1. El 1 es un número natural.
2. Si *n* es un número natural, entonces el sucesor de *n* también es un número natural.
3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales *n* y *m* con el mismo sucesor, entonces *n* y *m* son el mismo número natural.
5. Si el 1 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto. Este es el axioma de inducción, y captura la idea de inducción matemática.

Hay un debate sobre si considerar al 0 como número natural o no. Generalmente se decide en cada caso, dependiendo de si se lo necesita o no. Cuando se resuelve incluir al 0, entonces deben hacerse algunos ajustes menores:

1. El 0 es un número natural.
2. Si *n* es un número natural, entonces el sucesor de *n* también es un número natural.
3. El 0 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales *n* y *m* con el mismo sucesor, entonces *n* y *m* son el mismo número natural.
5. Si el 0 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto.

Además de los cinco axiomas, la aritmética de Peano recurre a dos **definiciones** (de la **suma** y de la **multiplicación**), que a veces se presentan como axiomas.

- Definiciones de suma y multiplicación:

$$
\begin{array}{ll}
D_1: & n+1=n' \\
 & n+m'=(n+m)' \\
D_2: & n\times 1=n \\
 & n\times m'=(n\times m)+n
\end{array}
$$

AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA

La geometría euclidiana es aquella que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. En ocasiones los matemáticos usan el término para englobar geometrías de dimensiones superiores con propiedades similares. Sin embargo, con frecuencia, geometría euclidiana es sinónimo de geometría plana.

Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una y sólo una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de forma continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma ángulos internos menores a un ángulo recto, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Este último postulado, que es conocido como el postulado de las paralelas, fue reformulado como:

5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Este postulado parece menos obvio que los otros cuatro, y muchos geómetras, incluido el propio **Euclides**, han intentado deducirlo de los anteriores. Cuando intentaron reducirlo al absurdo negándolo, surgieron **dos nuevas geometrías**: **la elíptica**, también llamada geometría de **Riemann** o riemanniana (dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta que pase por el punto y sea paralela a la recta dada) y **la hiperbólica** o de **Lobachevsky** (existen varias rectas paralelas que pasen por un punto exterior a una dada). El trabajo de **Albert Einstein**, hizo ver que entre las necesidades de la física moderna están las **geometrías no-euclidianas**, para describir el **espacio-tiempo curvo.**